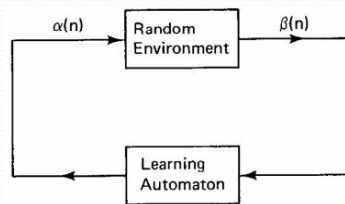


آتوماتون یادگیر Learning Automaton

> Learning Automaton
 Environment
 Automaton
 Deterministic Automaton
 Stochastic Automaton
 Main Characteristics of the ...
 ...Different Automata
 Stochastic Automata with ...
 ...Deterministic Output Mapping
 (Total) State Probabilities ($\pi(n)$)
 (Total) Action Probabilities ($p(n)$)
 Random Inputs

• آتوماتون یادگیر ماشینی است که در تعامل با محیط تصادفی پیرامون خود تأثیرات عملکردهای قبلی خود بر محیط و میزان مطلوبیت آنها را از طریق پاسخ محیط درک کرده و با اتخاذ استنتاجی خاص، احتمال عملکردهای گوناگون خود را برای انتخاب بهینه ترین عمل در شرایط مختلف به روز می رساند.

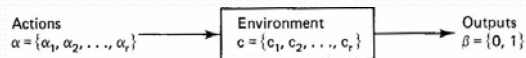


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

محیط Environment

• محیط پیرامون، مجموعه ای از کلیه شرایط و واقعیت‌های خارجی و عوامل تأثیر گذار (مثل آتوماتونها (آتوماتای دیگر) بر آتوماتون می باشد.

• محیط را با سه تایی $\{\alpha, c, \beta\}$ نشان می دهند. که در آن α ورودی محیط (عملکرد خروجی آتوماتون بر روی محیط)، β پاسخ خروجی محیط به آتوماتون (ورودی آتوماتون)، و c مجموعه احتمالات جریمه هر یک از عملکردها (رفتارها) آتوماتون بر محیط است. به عبارت دیگر آتوماتا با انجام عمل α_i با احتمال c_i از محیط جریمه دریافت خواهند کرد.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

محیط
Environment

- انواع محیط ها از لحاظ مقادیر خروجی (β) عبارتند از:
 - P -model : در این نوع، خروجیها باینری بوده و تنها شامل یکی از دو مقدار $\{0,1\}$ می باشند؛ "0" اشاره به دریافت پاسخ خوب از طرف محیط دارد که به آن "پاداش" می گویند (success=favorable response=reward)؛ "1" نیز بیانگر پاسخ بد از طرف محیط بوده و به آن "جریمه" گویند (failure=unfavorable response=penalty).
 - $Pr(\beta(n) = 1 | \alpha(n) = \alpha_i) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$
 - Q -model : در این نوع، خروجیها مقادیری گسسته در بازه $[0,1]$ می باشند.
 - S -model : در این نوع، خروجیها مقادیری پیوسته در بازه $[0,1]$ هستند.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

محیط
Environment

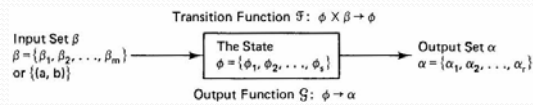
انواع محیط ها از لحاظ تغییرات مجموعه احتمالات جریمه (c):

- در نوع اول، مقادیر احتمالات جریمه (c_i) ثابت بوده و هرگز تغییر نمی کنند. اینگونه محیط ها را ایستا (stationary) گویند.
- در نوع دوم، مقادیر احتمالات جریمه با گذشت زمان (به طرق گوناگونی) تغییر می یابند؛ از این رو این محیط ها در سه دسته (periodic, slowly varying, random variables) طبقه بندی می شوند.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

تعریف آتوماتون Automaton

- همانطور که قبلاً اشاره شد در تعامل آتوماتا با محیط، ورودیهای محیط همان خروجیهای آتوماتا و خروجیهای محیط همان ورودیهای آتوماتا هستند.
- آتوماتا را با پنج تایی $\{\Phi, \alpha, \beta, F, H\}$ نشان می دهند. که در آن مجموعه Φ مجموعه ای از حالت‌های داخلی آتوماتا، α مجموعه اعمال (رفتارهای) خروجی آتوماتا، β مجموعه ورودیها و F و H توابعی هستند که بر حسب حالت و ورودی فعلی آتوماتا به ترتیب حالت بعدی و خروجی فعلی آنها را تعیین می کنند.
- در صورتی که خروجی فعلی تنها به حالت فعلی بستگی داشته باشد از تابع G بجای H استفاده خواهد شد. (شکل زیر)



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

تعریف آتوماتون Automaton

- تابع F را "State Transition Function" و تابع H یا G را "Output Function" گویند.

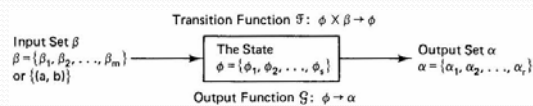
- در صورت استفاده از تابع خروجی G (در صورتی که خروجی فعلی تنها به حالت فعلی بستگی داشته باشد) آتوماتون را "state-output automaton" می نامند.

$$F(\cdot, \cdot) : \Phi \times \beta \rightarrow \Phi \quad \phi(n+1) = F[\phi(n), \beta(n)]$$

$$H(\cdot, \cdot) : \Phi \times \beta \rightarrow \alpha$$

$$G(\cdot) : \Phi \rightarrow \alpha \quad \alpha(n) = G[\phi(n)]$$

- با شروع از حالت اولیه $\phi(0)$ ، $\alpha(0)$ بدست آمده و با دریافت پاسخ $\beta(0)$ از سوی محیط، $\phi(1)$ حاصل می گردد.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

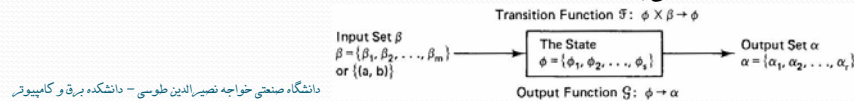
تعریف آتوماتون Automaton

- بنابر این حالت و عمل در هر لحظه (مرحله n))، تنها به یک مرحله قبل وابسته است نه بیشتر!

- انواع آتوماتا بر حسب نوع توابع انتقال (F) و خروجی (G):

- قطعی (Deterministic): در این نوع، توابع F و G از نگاشتی قطعی برخوردارند؛ به طوری که با وجود یک حالت اولیه مشخص و ورودی معین، حالت و عمل خروجی آتوماتا در مرحله بعد قطعاً معلوم می باشد.

- اتفاقی (Stochastic): در این نوع، توابع F و G دارای نگاشتی احتمالی و تصادفی هستند؛ از این رو توابع F و G با وجود یک حالت اولیه و ورودی معلوم، تنها بیانگر احتمال رخداد هر یک از حالات و اعمال بعدی می باشند. این آتوماتا در دو نوع کلی (Fixed-structure, Variable-structure) می باشند.



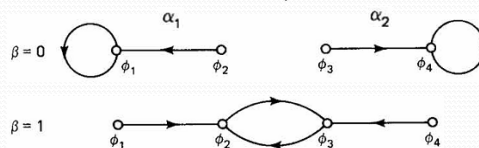
آتوماتون قطعی Deterministic Automaton

- توابع انتقال (F) و خروجی (G) در یک آتوماتون را به دو صورت ماتریسی یا گرافی می توان نگاهت کرد.

- برای آتوماتونی قطعی با دو ورودی ($m=2$)، دو خروجی ($r=2$) و چهار حالت داخلی ($s=4$)، گراف انتقال حالات برای دو ورودی مجزای β بصورت زیر می باشد:

$$\underline{\beta} = \{0, 1\}, \underline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \underline{\Phi} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$$

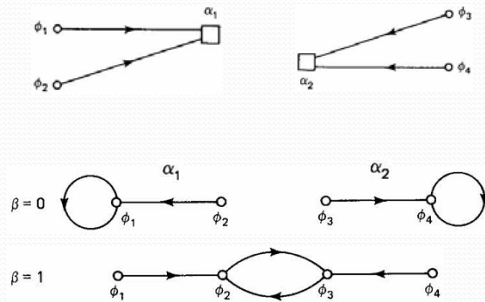
- در اینجا به طور مثال آتوماتون از حالت ϕ_1 تحت ورودی $\beta=1$ (دریافت جریمه) به حالت ϕ_2 می رود. و یا با دریافت پاداش از محیط ($\beta=0$) در حالت ϕ_4 ، در همان حالت باقی می ماند.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

آتوماتون قطعی Deterministic Automaton

- گراف رفتار (عملکرد) خروجی آتوماتون (G) نیز بصورت زیر است؛ که در آن دو حالت داخلی ϕ_1 و ϕ_2 برای عمل α_1 و دو حالت داخلی ϕ_3 و ϕ_4 مرتبط با عمل α_2 در نظر گرفته شده اند؛ لذا جابجایی بین دو حالت ϕ_1 و ϕ_2 یا بین دو حالت ϕ_3 و ϕ_4 منجر به تغییر رفتار آتوماتون نمی شود.



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

آتوماتون قطعی Deterministic Automaton

- ماتریس های انتقال حالات، m ماتریس $S \times S$ هستند که در آنها S تعداد حالات و m تعداد ورودیها می باشند.

$$F(0) = \begin{matrix} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \phi_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad F(1) = \begin{matrix} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \phi_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \phi_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$f_{ij}^\beta = 1$ if $\phi_i \rightarrow \phi_j$ for an input β
 $= 0$ otherwise.

- از آنجا که در هر سطر فقط و فقط یک مؤلفه برابر 1 است، لذا حالت بعدی آتوماتون قطعاً معین است (Deterministic).

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

آتوماتون قطعی Deterministic Automaton

- ماتریس رفتار خروجی متناظر با گراف آن، ماتریسی $S \times \Gamma$ است که در آن S تعداد حالات و Γ تعداد عمل‌ها می‌باشند.

$$G = \begin{matrix} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \phi_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{matrix}$$

$g_{ij} = 1$ if $G(\phi_i) = \alpha_j$
 $= 0$ otherwise

- از آنجا که در هر سطر فقط و فقط یک مؤلفه برابر 1 است، لذا رفتار خروجی آتوماتون قطعاً معین است (Deterministic).

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

آتوماتون اتفاقی Stochastic Automaton

- اگر حداقل یکی از دو ماتریس انتقال حالات (F) یا خروجی (G) تصادفی باشند، آتوماتون را آتوماتون اتفاقی گویند.
- در آتوماتون اتفاقی با وجود یک حالت اولیه و ورودی معلوم، توابع F و G به ترتیب احتمال رخداد هر یک از حالات و اعمال بعدی را بیان می‌کنند.

$$f_{ij}^{\beta} = Pr\{\phi(n+1) = \phi_j | \phi(n) = \phi_i, \beta(n) = \beta\} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ j = 1, 2, \dots, s \\ \beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^s f_{ij}^{\beta} = 1 \text{ for each } \beta \in \underline{\beta} \text{ and } i$$

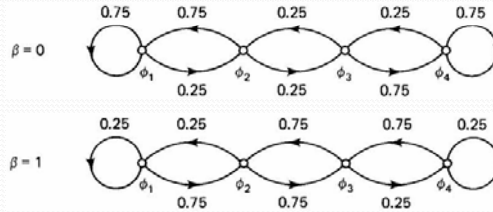
$$g_{ij} = Pr\{\alpha(n) = \alpha_j | \phi(n) = \phi_i\} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ j = 1, 2, \dots, r \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^r g_{ij} = 1 \text{ for each } i$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

آتوماتون اتفاقی Stochastic Automaton

مثال: Fixed-structure Stochastic Automaton



$$f_{34}^0 = Pr\{\phi(n+1) = \phi_4 | \phi(n) = \phi_3, \beta(n) = 0\} = .75$$

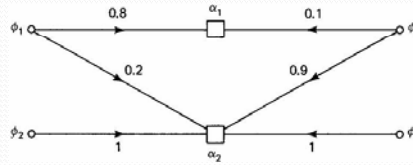
$$f_{44}^1 = Pr\{\phi(n+1) = \phi_4 | \phi(n) = \phi_4, \beta(n) = 1\} = .25$$

$$F(0) = \begin{bmatrix} .75 & .25 & 0 & 0 \\ .75 & 0 & .25 & 0 \\ 0 & .25 & 0 & .75 \\ 0 & 0 & .25 & .75 \end{bmatrix} \quad F(1) = \begin{bmatrix} .25 & .75 & 0 & 0 \\ .25 & 0 & .75 & 0 \\ 0 & .75 & 0 & .25 \\ 0 & 0 & .75 & .25 \end{bmatrix}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

آتوماتون تصادفی Stochastic Automaton

ادامه مثال:



$$g_{31} = Pr\{\alpha(n) = \alpha_1 | \phi(n) = \phi_3\} = 0.1$$

$$G = \begin{bmatrix} .8 & 0.2 \\ 0 & 1.0 \\ .1 & 0.9 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

تقسیم بندی آتوماتا

Main Characteristics of the Different Automata

مقایسه تابع انتقال حالات در انواع آتوماتا:

- **قطعی (Deterministic):** تابع $F(\beta)$ تنها شامل دو مقدار $\{0,1\}$ بوده و همواره این مقادیر ثابت هستند (این مقادیر در ماتریس مستقل از n و ورودیهای آتوماتا بوده و تغییر نمی کنند).
- **اتفاقی ساختار ثابت (Fixed-structure Stochastic):** تابع $F(\beta)$ شامل مقادیری در بازه $[0,1]$ است که این مقادیر همواره ثابت و بدون تغییر هستند. در این حالت هر $F(\beta)$ یک ماتریس تصادفی است.
- **اتفاقی ساختار متغیر (Variable-structure Stochastic):** تابع $F(\beta)$ شامل مقادیری در بازه $[0,1]$ می باشد؛ این مقادیر با گذشت زمان در n های گوناگون مقادیر متفاوتی را خواهند داشت.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

تقسیم بندی آتوماتا

Main Characteristics of the Different Automata

مثال: فرض کنید سه آتوماتای ذکر شده می خواهند بین دو رستوران A و B یکی را انتخاب کنند؛ همچنین فرض کنید که این سیستمها در مرحله قبل $(n-1)$ در رستوران A بوده اند؛ در اینصورت رفتار و عملکرد آنها به صورت زیر خواهد بود:

- **Deterministic:** در صورتی که کیفیت غذا در مرحله قبل در رستوران A خوب بوده است، باز هم در مرحله فعلی (n) به رستوران A رفته؛ در غیر اینصورت به رستوران B خواهد رفت.
- **Fixed-structure Stochastic:** در صورتی که کیفیت غذا در مرحله قبل در رستوران A مطلوب بوده، باز هم به رستوران A رفته؛ ولی در غیر اینصورت از یک سکه برای انتخاب تصادفی رستوران استفاده خواهد کرد (در این حالت احتمال انتخاب هر دو رستوران با یک سکه سالم در هر بار 50% می باشد و این احتمال همواره ثابت است).
- **Variable-structure Stochastic:** این نوع آتوماتا نیز برای انتخاب هر رستوران احتمالی را در نظر گرفته؛ ولی پس از رفتن به رستوران با توجه به میزان رضایت از آن رستوران درصد این احتمالات را تغییر داده و بهبود می بخشند (بدین ترتیب انتخاب بهتری را در دفعات بعد خواهند داشت).

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

احتمال وقوع يك حالت خاص (Total) State Probabilities ($\pi(n)$)

احتمال وجود آتوماتون در يك حالت خاص (π_i):

$$\pi(n) = [\pi_1(n), \pi_2(n), \dots, \pi_s(n)]^T$$

$$\pi_j(0) = Pr\{\phi(0) = \phi_j\}$$

$$\pi_j(n) = Pr\{\phi(n) = \phi_j | \beta(0), \dots, \beta(n-1)\}$$

- با وجود ورودی اولیه $\beta(0)$ و با فرض داشتن بردار اولیه احتمال حالات ($\pi(0)$)، احتمال اینکه آتوماتون در مرحله بعد ($n=1$) در حالت j -ام باشد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \pi_j(1) &= Pr\{\phi(1) = \phi_j | \beta(0)\} \\ &= \sum_{i=1}^s Pr\{\phi(1) = \phi_j | \phi(0) = \phi_i, \beta(0)\} Pr\{\phi(0) = \phi_i\} \\ &= \sum_{i=1}^s f_{ij}^{\beta(0)} \pi_i(0). \end{aligned}$$

- بردار احتمال حالات در مرحله ($n=1$): $\pi(1) = F^T(\beta(0))\pi(0)$

- لذا بردار احتمال حالات در هر مرحله برابر است با:

$$\pi(n) = F^T(\beta(n-1))F^T(\beta(n-2)) \dots F^T(\beta(0))\pi(0)$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

احتمال انجام يك عمل (Total) Action Probabilities ($p(n)$)

احتمال انجام يك عمل خاص (p_i):

$$p_i(n) = Pr\{\alpha(n) = \alpha_i | \beta(0), \dots, \beta(n-1)\} \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$p_i(n) = \sum_{j=1}^s (Pr\{\alpha(n) = \alpha_i | \phi(n) = \phi_j\} \cdot Pr\{\phi(n) = \phi_j | \beta(0), \beta(1), \dots, \beta(n-1)\})$$

با توجه به روابط زیر:

$$g_{ij} = Pr\{\alpha(n) = \alpha_j | \phi(n) = \phi_i\}$$

$$\pi_j(n) = Pr\{\phi(n) = \phi_j | \beta(0), \dots, \beta(n-1)\}$$

لذا داریم:

$$p_i(n) = \sum_{j=1}^s g_{ji} \pi_j(n)$$

- از این رو بردار احتمال عملکردها در هر مرحله برابر است با:

$$p(n) = G^T \pi(n)$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

ورودی های تصادفی

Random Inputs

- آتوماتونی قطعی را با مجموعه ورودی متشکل از دو مقدار $\beta = \{0,1\}$ در نظر بگیرید که احتمال هر ورودی آن به صورت زیر باشد:

$$Pr\{\beta(n) = 1\} = c$$

$$Pr\{\beta(n) = 0\} = 1 - c$$

- حتی با وجود قطعی بودن آتوماتون، بدلیل تصادفی بودن ورودیها، تابع انتقال حالات آتوماتون نیز تصادفی بوده و احتمال رخداد هر حالت بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij} &= Pr\{\phi(n+1) = \phi_j | \phi(n) = \phi_i\} \\ &= Pr\{\phi(n+1) = \phi_j | \phi(n) = \phi_i, \beta(n) = 0\} Pr\{\beta(n) = 0 | \phi(n) = \phi_i\} \\ &\quad + Pr\{\phi(n+1) = \phi_j | \phi(n) = \phi_i, \beta(n) = 1\} Pr\{\beta(n) = 1 | \phi(n) = \phi_i\} \\ &= f_{ij}^0(1-c) + f_{ij}^1c \end{aligned} \quad (1)$$

- لذا یا "پاداش گرفته و از ϕ_i به ϕ_j می رود" یا "جریمه گرفته و از ϕ_i به ϕ_j می رود".

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

ورودی های تصادفی

Random Inputs

مقایسه رفتار انواع آتوماتا با ورودیهای تصادفی:

- آتوماتای قطعی با ورودیهای تصادفی رفتاری مشابه آتوماتای اتفاقی با ورودیهای ثابت دارند؛ مشخصه های آنها عبارتند از:

$$f_{ij}^0, f_{ij}^1 \in [0,1] ; \bar{f}_{ij} \in [0,1] ; \beta = \{0,1\}$$

- برای آتوماتای اتفاقی ساختار ثابت با ورودیهای تصادفی باز هم به رابطه (1) خواهیم رسید اما با تفاوت زیر:

$$f_{ij}^0, f_{ij}^1 \in [0,1] ; \bar{f}_{ij} \in [0,1] ; \beta = \{0,1\}$$

یعنی رفتاری مشابه آتوماتای اتفاقی ساختار ثابت با ورودی ثابت خواهیم داشت.

- در آتوماتای اتفاقی ساختار متغیر، مشخصه ها همانند ساختار ثابت است ولی مؤلفه های تابع انتقال وابسته به n هستند.

$$\bar{f}_{ij}(n) = f_{ij}^0(n)(1-c) + f_{ij}^1(n)c$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

نُرم های رفتاری

Norms of Behavior

تعاریف

- میانگین جریمه (Average Penalty for Action Probability Vector)

$$M(n) = \Pr\{\beta(n) = 1 | P(n)\}$$

$$= \sum_{i=1}^r \Pr\{\beta(n) = 1 | \alpha(n) = \alpha_i\} \cdot \Pr\{\alpha(n) = \alpha_i\} = \sum_{i=1}^r C_i P_i(n)$$

- میانگین جریمه برای آتوماتون کاملاً تصادفی (Pure Chance Automaton)

$$p_i(n) = \frac{1}{r}; \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}; \quad M_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r C_i$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

23

نُرم های رفتاری

Norms of Behavior

تعاریف

- آتوماتون مصلحت گرا (Expedient)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[M(n)] < M_0$$

- آتوماتون بهینه (Optimal)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[M(n)] = C_i; \quad M(n) = \min_i \{C_i\} \triangleq C_i$$

- آتوماتون اِپسیلون-بهینه (ϵ -Optimal)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[M(n)] < C_i + \epsilon; \quad \epsilon > 0$$

- آتوماتون اکیداً مصلحت گرا (Absolutely Expedient)

$$E[M(n+1) | P(n)] < M(n); \quad E[M(n+1)] < E[M(n)]$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - دانشکده برق و کامپیوتر

24